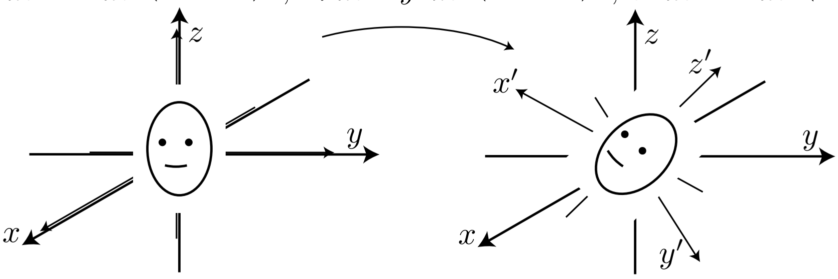
座標変換・基底変換（山田）

「上向いて右向いて」

設定 最初の状態で, 顔と座標軸の関係を左図の通りとする

鼻軸が x-軸（前が正）, 耳軸が y-軸（左が正）, 首軸が z-軸（上が正）



さて, 顔（座標軸）を次のように動かして新しく $x'y'z'$-座標軸を作る（右図）ときの基底変換行列 P を求めたい.

(1) 30 度 上を向く（耳軸を軸に）, それに続いて
(2) 30 度（本人からみて）右を向く（首軸を軸に）, それに続いて
(3) 30 度（本人からみて）時計回りに首を傾げる（鼻軸を軸に）.

(1), (2), (3) <u>それぞれの</u> 基底変換行列は

(1) に対して： $P_1 := \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & 0 & -\sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{6} & 0 & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

(2) に対して： $P_2 := \begin{pmatrix} \cos-\frac{\pi}{6} & -\sin-\frac{\pi}{6} & 0 \\ \sin-\frac{\pi}{6} & \cos-\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) に対して： $P_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

問 1 問題の基底変換行列 P を求めるには, この 3 つの行列 P_1, P_2, P_3 をどうすれば良いか？右／左から順にかける？　逆行列も必要？... （基底変換の問題）

問 2 新しい座標（x', y', z'）で ${}^t(4, 8, 8\sqrt{3})$ となる点の古い座標（x, y, z）による表示を求めるにはどんな計算をすれば良いか？(座標変換の問題)

考えるヒント：

・２次元（平面）で考える.　　・３回の移動でなく２回の例でためす.
・30 度を 90 度に変えてやってみる.　　・$(4, 8, 8\sqrt{3})$ でなく $(1, 0, 0)$ などで試す

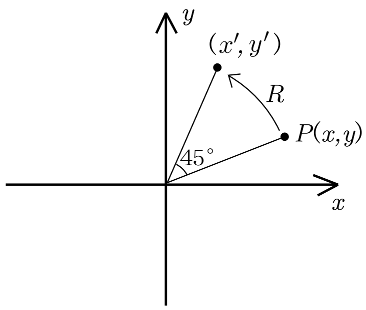
答はすぐには教えない.　頭で考えることが大切, というわけさ.

次の微妙に違う問題 $\boxed{問 1_1}$ $\boxed{問 1_2}$ を解き分けよ.

$\boxed{問 1_1}$ xy-平面からそれ自身への次の１次変換 $R : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を考える.

原点中心に 点 $P(x, y)$ を 反時計回り に ４５度
($= \frac{\pi}{4}$) 回転した点 (x', y') を P の像 $R(P)$ とする

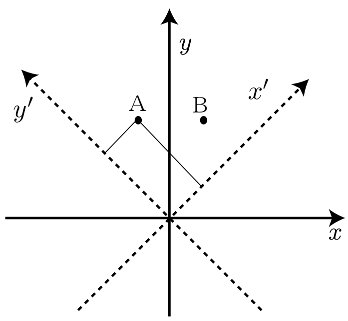
この１次変換 R を行列表示せよ. （厳密には，標準基底に関する R の行列表示）



$\boxed{問 1_2}$ 平面（２次元線形空間）内に２つの座標軸をとる.

(1) 座標軸 xy を, 原点を中心に 反時計回り に４５度 回転して新しい座標軸 $x'y'$ をつくる．xy 座標による標準基底 $< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 >$ から $x'y'$ 座標による標準基底 $< \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 >$ への基底変換行列を求めよ.

(2) $x'y'$-座標で $(1, 2)$ と表示される点（図 A）の xy-座標での表示を求めよ. 計算法（前問の行列の使い方：座標変換）を示すこと.



さらに, $x'y'$-座標で $(2, 1)$ の点を B とし, $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ となる点 C を次の各方法で作図せよ.

(a) $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ の幾何的な意味から作図.

(b) $x'y'$-座標での成分計算で点 C をプロットせよ.

(c) xy-座標での成分計算で点 C をプロットせよ.

(d) 問題 (b) で得た C の $x'y'$-座標を xy-座標に変換して点 C をプロットせよ.

回転の問題・人形の問題 の答（山田）

$\boxed{\text{問 1 の答}}$ 左から順に (1)(2)(3) の行列をかければよい. $P = P_1P_2P_3$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

説明：座標軸を動かすときは基底変換だと考えると良い.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1{}^{(1)} & \mathbf{e}_2{}^{(1)} & \mathbf{e}_3{}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} P_1 \quad \text{と}$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1{}^{(2)} & \mathbf{e}_2{}^{(2)} & \mathbf{e}_3{}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1{}^{(1)} & \mathbf{e}_2{}^{(1)} & \mathbf{e}_3{}^{(1)} \end{pmatrix} P_2 \quad \text{から得られるのは}$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1{}^{(2)} & \mathbf{e}_2{}^{(2)} & \mathbf{e}_3{}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} P_1P_2 \quad \text{である.}$$

$\boxed{\text{問 2 の答}}$ 座標ベクトルに P を左からかければよい.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 9\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

説明：$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}' & \mathbf{e}_3{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \underline{P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$ による.

$\boxed{\text{問 } 1_1 \text{ の答}}$ ただの回転行列. $\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{問 } 1_2 \text{ の答}}$ (1) 基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ から基底 $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ への基底変換行列 は 上に同じ.

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ から $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ への基底変換行列 は,
$\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ から $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ への座標変換行列 に一致する.

$x'y'$-座標で $(1, 2)$ の点 A は, xy-座標では $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ となる. 計算は左下の通り.
$x'y'$-座標で $(2, 1)$ の点 B は, xy-座標では $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ となる. 計算は右下の通り.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ について, (a) 幾何的な作図は, 高校で習った通り.
(b) $x'y'$-座標で $2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. (c) xy-座標で $2\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

(a) 〜 (d) どの方法でも現象は同じ. 座標は “観測者” によって異なるが, 変換できる.