

行列の対角化 (by 山田)

n 次正方行列 A は, そのまま「 $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像 $T_A: A$ を左からかける」とみなすことができる.

$$\begin{aligned} T_A: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{x} &\mapsto A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

A が対角行列であると, この写像の様子は非常にわかりやすい.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \alpha_2 x_2 \\ \vdots \\ \alpha_n x_n \end{bmatrix}.$$

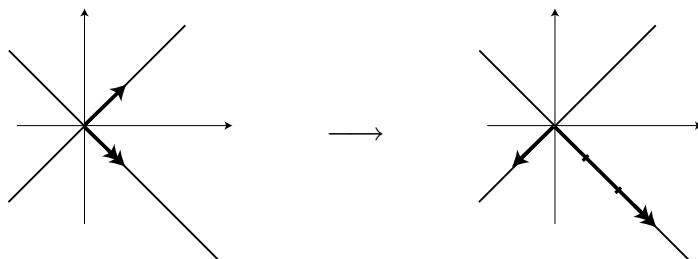
「各第 i 座標 x_i ごとにそれぞれ α_i 倍 (拡大・縮小, 反転) する写像」である.

動機: 一般に, 線形空間 V から V 自身への線形写像 $f: V \rightarrow V$ は, V に基底 B を 1 つ定めれば, V と同じ次元の $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim V$) が同一視できて (「基底 B に関する座標」による), f は (行列を左からかける写像として) 行列表示される.

基底 B のとりかたはいろいろあるがこれをうまくとれば, 行列表示が簡単になって写像 f の様子がわかりやすい, というのが発想である.

しかも, 始めから $V = \mathbb{R}^n$ で $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ の場合でさえも, 基底を (標準基底ではない基底に!) とりかえることで f の様子がわかりやすくなることがあるのだ. それが対角化の本質である.

例: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ の対角化: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ によって $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.



用語: A を n 次正方行列とする.

$$A\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{o}) \quad (1)$$

となるとき, α を A の**固有値**, $\mathbf{a}$ を A の固有値 α に関する**固有ベクトル**, α に関する固有ベクトルの集合 $W_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}\}$ (または $W(\alpha)$ etc) を「 A の α に関する**固有空間**」とよぶ (p.136).

考え方と求め方: 式 (1) を $(A - \alpha I)\mathbf{a} = \mathbf{o}$ と変形してこう考える: ベクトル $\mathbf{x}$ に関する方程式

$$(A - \alpha I)\mathbf{x} = \mathbf{o} \quad (2)$$

が $\mathbf{o}$ 以外の解 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ をもった, と. そのためには $\det(A - \alpha I) = 0$ が必要となる.

[Step1] λ に関する n 次方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ を解く. (A の固有方程式)

そのそれぞれの解 α_i が A の固有値 となる.

[Step2] 各固有値 $\lambda = \alpha_i$ に対して $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 (2) を解く (固有空間 $W(\alpha_i)$).

ここから先の一般論は難しくなる (固有方程式が重解や虚数解をもつとき大変).

そこで, ここでは次の仮定をみたす場合だけ考察する (p.145).

【仮定】 [Step1] で λ の n 次方程式の解が 実数解のみ $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (r 個とした) で,

さらに, 固有空間 $W(\alpha_i)$ の次元の和が n , と仮定*: $\sum_{i=1}^r \dim W(\alpha_i) = n$.

〈事実〉 このとき [Step2] の それぞれの固有空間 $W(\alpha_i)$ の基底に通し番号をつけた

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立となり, したがって $\mathbb{R}^n$ の基底となる.

[Step3] 各固有値 α_i に対して $W(\alpha_i)$ ($\boldsymbol{x}$ に関する方程式 (2) の解空間) の基底をとる.

それらに通し番号をつけて, $\mathbb{R}^n$ の基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ を構成.

α_i の添字 i は, 対応する $\boldsymbol{a}_i$ に応じて, 重複を許してつけかえる.

[Step4] それら $\boldsymbol{a}_i$ 達を並べた行列を P とおく. $P = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$.

[Fin.] 上の 〈事実〉 から P^{-1} は存在し, 下 の原理 (n 個の式を並べて 1 つの式にする) で

$$\begin{array}{rcl} A \boldsymbol{a}_1 & = & \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 \\ A \boldsymbol{a}_2 & = & \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 \\ & \ddots & \\ A \boldsymbol{a}_n & = & \alpha_n \boldsymbol{a}_n \end{array} \quad n \text{ 個の式を並べて, 1 つの式に}$$

$$A (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) = (\alpha_1 \boldsymbol{a}_1, \alpha_2 \boldsymbol{a}_2, \dots, \alpha_n \boldsymbol{a}_n) \quad \checkmark \text{ 便利な表記法}$$
$$AP = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \alpha_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

となり, P^{-1} を左からかけて, $P^{-1}AP$ は対角行列となる. 対角成分は固有値が並ぶ.

注*: 対角化できない行列もある. 例えば次の一番左の 2 つのような行列, それを含むような行列 (左から 3 つ目). 対角化するために虚数が必要になる例として一番右の行列 (回転).

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

対角化できない行列に対しては「ジョルダン標準形」という理論がある. 早めに学びたい場合はこのキーワードで図書などを探すと良い.