演習：シンプソンの第一公式

シンプソンの第一公式は３つの積分点での重みが

$$\frac{h}{3}\{1,4,1\}$$

となっている。

これは、ある関数 $f(x)$ を、n=2のLagrangeの補間公式で近似する場合に相当する。

（１）n=2のLagrangeの補間公式を示せ

（２）区間$[x_0, x_2]$で$L_2(x)$を積分することにより

３つの積分点の重みが１：４：１であることを示せ

台形公式の場合

Lagrange（ラグランジュ）の補間公式（多項式）

$(N+1)$個の点　(x_i, f_i)　$(i=0,1,2,\cdots,N)$　を通るN次の近似式（多項式）

$$L_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} f_0$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} f_1 + \cdots$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} f_i + \cdots$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} f_n$$

（２）のヒント

比（１：４：１）を求めるだけなら

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

とでも置けば簡単に確認できる。

基本区間での積分は

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f_1 \right\} dx$$

$$= \frac{x_1-x_0}{2}(f_0+f_1)$$